CPI2-UM6P | Analyse 3 | Prof : Taha EL BAKKALI EL KADI

TD N°1 : Calcul différentiel

Exercice 1

Les fonctions suivantes ont-elles une limite finie en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
5. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.
6. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$.
7. $f(x,y) = \dfrac{xy^4}{x^4+y^6}$.
8. $f(x,y) = \dfrac{x^3y^4}{x^8+y^6}$.

Exercice 2

Etudier l'existence et continuité des dérivées partielles de :

$$f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right), & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Exercice 3

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On dit que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in \Omega$ si $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe.
En notant $P = \operatorname{Re} f$ et $Q = \operatorname{Im} f$, montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in \Omega$ si, et seulement si, f est différentiable en z_0 et :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0).$$

Ces relations sont connues sous le nom d'**équations de Cauchy–Riemann.**

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application :

$$\phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto M^{-1}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2. En calculant les dérivées partielles de ϕ au point I_n, calculer la différentielle $d\phi$ de ϕ au point I_n.
3. En déduire la différentielle de ϕ en tout point de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5

On note, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A) Étude en fonction de α, β.

1. Étudier la continuité de $f_{\alpha,\beta}$ sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, préciser les conditions sur (α, β) assurant la continuité en $(0,0)$.
2. Calculer $\dfrac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial y}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Déterminer, en fonction de (α,β), quand $\dfrac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial x}$ (resp. $\dfrac{\partial f_{\alpha,\beta}}{\partial y}$) est continue en $(0,0)$. En déduire une condition suffisante/nécessaire pour que $f_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

B) Cas particulier $\alpha = 1,\ \beta = 2$. On considère

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0,0)$ (prolongement par continuité).
2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Donner la différentielle $df(x_0,y_0)$ pour tout $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
4. Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application déterminant définie par

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad M \longmapsto \det M$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle.